Sucesiones y Series de funciones

Sucesión de funciones: $\alpha : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$

$(\circ \mathbb{N}_0)$ espacio de funciones con dominio $A \subset \mathbb{R}$ o $A \subset \mathbb{C}$ codominio $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{C}$

para α_n: $\alpha_n : A \to \Omega$

Ejemplos

① $\alpha_n(x) = x^n$

② $\alpha_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$

para cierta sucesión numérica $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, y cierto x_0.

③ Si $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\alpha_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

④ $\alpha_n(x) = nx(1-x)^n$

⑤ $\alpha_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

⑥ $\alpha_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

Serie de funciones: dada la sucesión de funciones $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, la serie de término general α_n es la sucesión de sumas parciales: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)$

(α_n tienen el mismo dominio $A \Rightarrow S_n$ tienen ese dominio A)

Ejemplos ② y ③ son también series.

Convergencia

Convergencia puntual:

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones con dominio A

Tomemos $x_0 \in A$.

$(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ sucesión numérica.

¿converge? ¿no converge?

↳ existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$

Ej: $f_n(x) = x^n$

$x = 1/2$

$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n}$

$f_1(1/2) = 1/2$

$f_2(1/2) = 1/4$

$f_3(1/2) = 1/8$

$\vdots$

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en x si la sucesión numérica $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge.

Campo de convergencia puntual:

$$A_0 = \{ x \in A : (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ converge} \}$$

Si $A_0 \neq \phi$, queda definida:

$$f : A_0 \to \Omega, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$f(x)$: límite puntual.

Ejemplos

1) $f_n(x) = x^n \qquad A = \mathbb{R}$

$f_n(x)$ converge para $x \in (-1, 1] = A_0$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ si $x \in (-1,1)$
$\qquad\qquad\qquad\quad = 1$ si $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

3') $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ → ¿para qué x converge?

$a_k = \frac{x^k}{k!}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \underset{x\neq 0}{=} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

cualquiera sea $x \neq 0$

⇒ (D'Alembert) $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge para todo x

$A_0 = \mathbb{R}$

(4') $\alpha_n(x) = n x (1-x)^n \qquad A = \mathbb{R}.$

en $x=0$ $\quad \alpha_n(0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

en $x=1$ $\quad \alpha_n(1) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

si $x \in (0,2)$: $\alpha_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\qquad$ (queda $n\lambda^n$ con $|\lambda|<1$) $\quad n\lambda^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x > 2$ $\qquad \alpha_n(x)$ diverge

$x < 0$ $\qquad \alpha_n(x)$ diverge

$\Rightarrow$ campo de convergencia : $A_0 = [0,2]$.

$\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x) = 0$ para $x \in A_0$

(5') $\alpha_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \qquad A = \mathbb{R}.$

si $|x|<1$ $\qquad \alpha_n(x) \longrightarrow 0$

si $|x|>1$ $\qquad \alpha_n(x) \longrightarrow 1$

si $|x|=1$ $\qquad \alpha_n(x) = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ campo de convergencia : $A_0 = \mathbb{R}$

$$\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x|<1 \\ 1 & \text{si } |x|>1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = 1 \end{cases} \quad \text{(discontinua)}$$

(6') $\alpha_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad A = \mathbb{R}$

$\alpha_n(x) \longrightarrow \sqrt{x^2} = |x|$ $\qquad$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$A_0 = \mathbb{R}$.

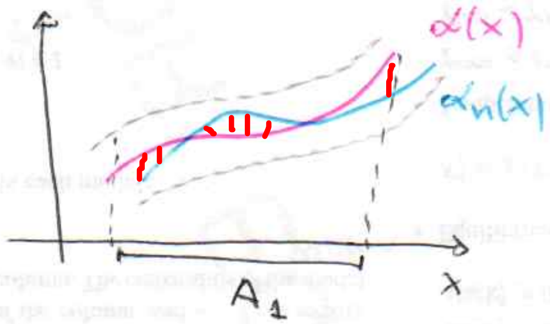
$\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x) = |x| \;\rightarrow$ no derivable en $x=0$

Convergencia uniforme.

Dado $A_1 \subset A_0$, se dice que la sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A_1 a α si

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\alpha_n(x)-\alpha(x)|,\ x\in A_1\} = 0$$

siendo $\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n(x)$



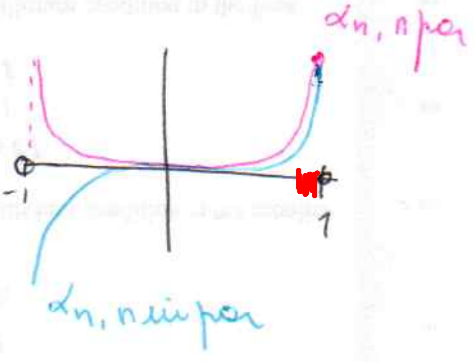
Ejemplo

(1) $\alpha_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha(x) = \begin{cases} 0 & x\in(-1,1) \\ 1 & x\in 1. \end{cases}$

$\sup\{|\alpha_n(x)-\alpha(x)|,\ x\in(-1,1)\} =$

$= \sup\{|x|^n,\ x\in(-1,1)\} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\alpha_n(x)-\alpha(x)|,\ x\in(-1,1)\} = 1 \neq 0$



$\Rightarrow \alpha_n$ no converge uniformemente en $(-1,1)$

¿Y si $A_1 = [-0.9,\ 0.9]$?

$\sup\{|\alpha_n(x)-\alpha(x)|,\ x\in[-0.9,0.9]\} = \sup\{|x|^n,\ x\in[-0.9,0.9]\}$

$= 0.9^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \alpha_n(x)$ converge uniformemente en $[-0.9, 0.9]$.

5

4'' $f_n(x) = nx(1-x)^n \qquad A_1 = [0,1]$.

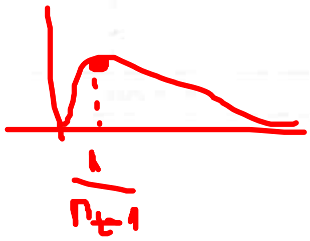
$f(x) = 0$

$\sup\{\,|f_n(x) - f(x)|,\ x \in [0,1]\} = \sup\{\,nx(1-x)^n,\ x\in[0,1]\}$

$= \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ ______

$\uparrow$ max de $nx(1-x)^n$ en $[0,1]$

se alcanza en $x_0 = \dfrac{1}{n+1}$



$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{\,|f_n(x)-f(x)|,\ x\in[0,1]\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1} = \dfrac{1}{e} \neq 0$

$\Rightarrow f_n$ no converge uniformemente a f en $A_1 = [0,1]$.

Ejemplo:

$f_n(x) = n^2 x e^{-nx} \qquad A = [0,\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ si $x \in [0,\infty)$ campo de convergencia puntual: $A_0 = [0,\infty)$

C.U.? Tomemos $A_1 = [0,1]$

$\sup\{\,|f_n(x) - f(x)|,\ x\in[0,1]\} =$

$= \sup\{\,n^2 x e^{-nx},\ x\in[0,1]\} = \dfrac{n}{e}$

$n^2\cdot\dfrac{1}{n}e^{-\frac{n}{n}} = ne^{-1}$ $\qquad\downarrow$ max de f_n se alcanza en $\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{\,|f_n(x)-f(x)|,\ x\in[0,1]\} \neq 0$

$\Rightarrow f_n$ no converge uniformemente a f en $[0,1]$.

Observen: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} 1-(1+n)e^{-n} = 1$

$\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$ $\qquad \Big\}\neq$

Convergencia de serie de funciones

Dada la serie de funciones,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x)$$

* $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en x si la serie numérica $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ converge

campo de convergencia puntual:

$$A_0 = \{ x \in A : \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\right)_{n=1}^{\infty} \text{ converge} \}$$

queda definida la función límite puntual:

$$\alpha : A_0 \to \mathbb{R} \quad \alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n(x)$$

* $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge absolutamente en x si la serie numérica $\left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_n(x)|\right)_{n=1}^{\infty}$ converge

$A_0^{abs} \subset A_0$

campo de convergencia absoluta:

$$A_0^{abs} = \{ x \in A : \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_n(x)|\right)_{n=1}^{\infty} \text{ converge} \}$$

* $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A_1 si $\sup\{ |S_n(x) - \alpha(x)|, x \in A_1 \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Criterio de Weierstrass:

Sea $\sum \alpha_k$ una serie de funciones, y A_1 un conjunto, $A_1 \subset A_0$ tal que $|\alpha_k(x)| \le b_k$ para $x \in A_1$, donde la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente.

Entonces la serie $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente y absolutamente en A_1.

Ejemplos

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k^2} \qquad x\in[0,\infty)=A$$

¿para qué x converge? caso $x=0$: $S_n(0)=\sum 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Fijado x, tenemos serie numérica de términos $a_k=\frac{x^k}{k^2}$

D'Alembert: $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^2}{x^k}=x\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\xrightarrow{k\to\infty} x$

si $x\neq 0$

Criterio dice: si $x<1 \Rightarrow$ serie $\sum\frac{x^k}{k^2}$ converge

$x>1 \Rightarrow$ serie $\sum\frac{x^k}{k^2}$ diverge

si $x=1$? $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge.

$A_0=$ campo de convergencia $=[0,1]$

¿uniforme?

Usemos Weierstrass: $\left|\frac{x^k}{k^2}\right|\leq\frac{1}{k^2}$ si $x\in A_0$ $\quad \alpha_k(x)$

y $\sum\frac{1}{k^2}$ converge $\Rightarrow$

$(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $A_0=[0,1]$, y

converge absolutamente en c/ punto de $A_0=[0,1]$.

(también converge unif. en $[-1,1]$)

C.U y consecuencias

Teorema Sea $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones, uniformemente convergente en A_1 a la función α.

– Si α_n son todas continuas en $A_1 \Rightarrow \alpha$ es continua en A_1

$\begin{pmatrix} A_1 \subset \mathbb{R}, \\ A_1 = [a,b] \end{pmatrix}$ – Si α_n son integrables en $A_1 \Rightarrow \alpha$ es integrable en A_1

y: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_1} \alpha_n(x)\,dx = \int_{A_1} \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x)\,dx = \int_{A_1} \alpha(x)\,dx$

En particular, para una serie $(S_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right)_{n=1}^{\infty}$ que C.U en A_1

$A_1 = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_1} S_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{A_1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\,dx =$$

$$= \int_{A_1} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\,dx =$$

$$= \int_{A_1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x)\,dx = \int_{A_1} \alpha(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_1} \alpha_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_1} \alpha_k(x)\,dx$$

Podemos escribir:

$$\boxed{\int_{A_1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_1} \alpha_k(x)\,dx}$$

Teorema

Sea $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en A_1 tal que
- α_n es derivable en A_1 para todo n,
- $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A_1 a α
- $(\alpha_n')_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A_1

Entonces α es derivable en A_1 y $\alpha'(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n'(x)$

Ejemplo

6'' $\alpha_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ converge a $\alpha(x) = |x|$ en $\mathbb{R}$.

¿Uniformemente? en $\mathbb{R}$

$$\sup\{|\alpha_n(x) - \alpha(x)|, x\in\mathbb{R}\} = \sup\{|\sqrt{x^2+1/n} - |x||, x\in\mathbb{R}\}$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{(\sqrt{x^2+1/n} - |x|)\cdot(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|)}{(\sqrt{x^2+1/n} + |x|)}\right|, x\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$= \sup\left\{\frac{1}{n(\sqrt{x^2+1/n} + |x|)}, x\in\mathbb{R}\right\} = \frac{1}{n\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\alpha_n(x) - \alpha(x)|, x\in\mathbb{R}\} = 0$$

$\Rightarrow (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

α_n derivables: $\alpha_n'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1/n}} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

$(\alpha_n')_{n=1}^{\infty}$ no C.U., ya que, si lo hiciera, su límite debe ser una función continua (por teorema anterior) α_n' son continuas.

(eso justifica por qué puede ser $\alpha(x)$ no derivable)

Series de potencias

Dado z_0, y una sucesión numérica $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ se llama $\longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k (z-z_0)^k\right)_{n=1}^{\infty}$

serie de potencias con centro en z_0

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$: sucesión coeficientes de la serie

sucesión de sumas parciales (sucesión de polinomios)

Ej.

$$1 + (z-z_0) + (z-z_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \qquad \text{coef: } a_k = 1$$

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{coef: } a_k = \frac{1}{k!}$$

centro: $z_0 = 0$

$$z + 2z^2 + 3z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^k \qquad \text{coef: } a_k = k$$

centro $z_0 = 0$

Convergencia?

$\sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k$ converge si $|z-z_0| < 1$, diverge si $|z-z_0| \geq 1$.

campo de convergencia: $A_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < 1\}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ convergencia absoluta?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{z^k}{k!}\right|}_{b_k} \qquad \frac{b_{k+1}}{b_k} \overset{\text{si } z \neq 0}{=} \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|}{k+1} = 0$$

para todo z.

$A_0 = \mathbb{C}$

$\sum_{k=0}^{\infty} k! \, z^k$ convergencia absoluta?

$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|k!| \, |z|^k}_{b_k \geq 0}$ $\qquad \dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \dfrac{(k+1)! \, |z|^{k+1}}{k! \, |z|^k} = (k+1)\,|z|$

$\lim_{k\to\infty} \dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} (k+1)\,|z| = \text{“}\infty\text{''} > \text{“}1\text{''}$
$\uparrow$
$z \neq 0$

$\Rightarrow$ no converge absolutamente para $z \neq 0$.

$\sum_{k=0}^{\infty} k! \, z^k$

como $\lim_{k\to\infty} k! \, z^k \neq 0$ para $z \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k! \, z^k$ no converge si $z \neq 0$

Teorema (Cauchy-Hadamard)

La serie de potencias $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k\right)_{n=0}^{\infty}$

tiene un campo de convergencia puntual A_0 que es alguno de estos casos:

a) $A_0 = \{z_0\}$

b) $B(z_0, R) \subset A_0 \subset \overline{B}(z_0, R)$, para algún R
↳ bola cerrada

c) $A_0 = \mathbb{C}$

Radio de convergencia: en caso b: ese R
" " a: $R = 0$
" " c: $R = \infty$

Además: si $R > 0$, la convergencia es absoluta para todo $z \in B(z_0, R)$.

Además: si $R>0$, la función límite:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{es holomorfa en } B(z_0,R)$$

y su derivada en cada punto es:

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k\,(z-z_0)^{k-1}$$

y esta serie tiene radio de convergencia R.

Además: si $R>0$ la convergencia es uniforme en $\overline{B}(z_0,r)$ ~~para todo~~ con $r<R$

Además: cálculo de R:

a) si existe $L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow R = \frac{1}{L}$

b) si existe $L' = \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \Rightarrow R = \frac{1}{L'}$

Ej: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k}$ $\quad z_0=0, \quad a_k = \frac{1}{2^k} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2} = L$

$\Rightarrow \boxed{R=2} \Rightarrow A_0 = \{z\in\mathbb{C} : |z|<2\}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k} = \sum \left(\frac{z}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}$$

si $\left|\frac{z}{2}\right|<1$

$|z|<2$